Элементы исследования на уроках математики

Составители:
Коник Ольги Юрьевна, доцент кафедры математического образования ГАУ ДПО «СОИРО»
Миронова Марина Геннадиевна, ст. методист, ст. преподаватель кафедры математического образования ГАУ ДПО «СОИРО»

Содержание

Исследовательская деятельность школьников на уроках математики

Особенность работы учителя в условиях реализации Федерального государственного образовательного стандарта состоит в том, что для организации исследовательской деятельности обучающихся он сам в совершенстве должен владеть методами научного исследования: уметь формулировать проблему, задачу, вопрос; разработать гипотезу, определить схему эксперимента и т.д.

Главной целью современного урока является гармоничное развитие каждой личности в процессе обучения и воспитания. Это реализуется при помощи личностно-ориентированного и системно-деятельностного подхода к обучению. Организация современного урока должна быть динамична и вариативна. На уроке необходимо использовать современные педагогические технологии.

Развивающим обучением можно считать только обучение, при котором учитель, опираясь на знание закономерностей развития мышления, специальными педагогическими средствами ведет целенаправленную работу по формированию мыслительных способностей и познавательных потребностей своих учеников в процессе изучения ими основ наук. Основным методом всех технологий развивающего обучения является исследовательская деятельность учащихся. Именно поэтому подготовка ребенка к исследовательской деятельности, обучение его умениям и навыкам исследовательского поиска становится важнейшей задачей образования и современного учителя.

Основоположниками этого метода были российские педагоги и психологи начала XX века В.П. Вахтеров и Л.С. Выготский. Цель исследовательского метода – «вызвать» в уме ученика мыслительный процесс, который переживает творец и изобретатель, школьник должен почувствовать прелесть открытия. Если ребенок обнаружит, что математическая задача столь же увлекательна, как кроссворд, и что напряженная умственная работа может быть столь же желанной, что и стремительная спортивная или компьютерная игра, то он будет получать удовольствие от занятия математикой и забудет ее нескоро. Когда человек получает удовольствие от своей работы? Когда он самчто-то обнаружил, увидел, сделал…

Математика в отличие от большинства других преподаваемых в школе дисциплин имеет предметом своего изучения не непосредственно вещи, составляющие окружающий нас внешний мир, а количественные отношения и пространственные формы, свойственные этим вещам. Этой особенностью математической науки в первую очередь объясняются те хорошо известные методические трудности, которые неизбежно встают перед преподавателем математики и которых почти не знают преподаватели других наук: перед учителем математики стоит нелегкая задача — преодолеть в сознании учеников представление о "сухости", формальном характере, оторванности этой науки от жизни и практики. Именно введение элементов исследования на уроках математики помогает избавиться от этой трудности.

На начальном этапе важно так организовать учебную работу детей на уроке, чтобы они ненавязчиво усваивали процедуру исследования, последовательно проходя все его основные этапы:

- мотивация исследовательской деятельности;
- постановка проблемы;
- сбор фактического материала;
- систематизация и анализ полученного материала;
- выдвижение гипотез;
- проверка гипотез;
- доказательство или опровержение гипотез.

Мотивация исследовательской деятельности осуществляется различными способами: можно сделать акцент на значимости ожидаемых результатов, предложить оригинальное или неожиданно сформулированное учебное задание и т.п. При исследовании мотивирующая (исходная) задача должна обеспечить «видение» учащимися более общей проблемы, нежели та, которая отражена в условии задачи. В процессе работы над исследованием, проектом формируются такие качества, как организованность, способность разумно планировать и упорядочивать ход своей деятельности, умение работать в коллективе, дисциплинированность. Кроме того, исследовательская деятельность помогает выработать у ученика умение рефлексии - самостоятельного анализа своих действий. При этом следует учесть, что мотивацию и потребность к поисковой интеллектуальной работе надо еще взрастить из естественной любознательности, присущей многим ученикам. Обучая школьников анализу, синтезу, аналогии, знакомя их с основными методологическими принципами исследовательского рода деятельности, учитель подготавливает ученика к необходимости самостоятельной исследовательской работы как наиболее полной формы реализации творческого потенциала, самораскрытия и самореализации. Таким образом, исследовательская деятельность способствует формированию следующих универсальных учебных действий:

- самостоятельно объяснять и доказывать новые факты, явления закономерности;
- классифицировать, сравнивать, анализировать и обобщать ранее изученные явления, закономерности;
- проводить эксперименты, выдвигать и обосновывать гипотезы;
- устанавливать причинно-следственные связи и отношения;
- рассматривать одни и те же факты, явления, закономерности под новым углом зрения;
- находить несколько вариантов решения, выбирать и обосновывать наиболее рациональный способ;
- рецензировать и оценивать работу исследовательского характера.

В наше время быстрых перемен, постоянного внедрения новых технологий, новых знаний, современное общество как никогда нуждается в высокообразованных молодых специалистах, умеющих принимать на практике полученные знания, уже имеющих опыт самостоятельной исследовательской работы. Современный темп жизни предъявляет свои требования к системе образования.

Жажда открытия, стремление проникнуть в самые сокровенные тайны бытия рождаются еще на школьной скамье. Уже в начальной школе можно встретить таких учеников, которых не удовлетворяет работа со школьным учебником, им неинтересна работа, ограниченная временем урока, они читают словари и специальную литературу, ищут ответы на свои вопросы в различных областях знаний. Именно в школе важно выявить всех, кто интересуется различными областями науки и техники, помочь претворять в жизнь их планы и мечты, вывести школьников на дорогу поиска в науке, в жизни, помочь наиболее полно раскрыть свои способности.

Велико значение творческой исследовательской работы школьников в плане изменения содержания образования и связанной с этим модернизации образовательной среды. Исследовательская деятельность может быть организована на всех этапах процесса обучения математики: при объяснении нового материала, закреплении, повторении, контроле знаний, умений, навыков.

Для педагога очень важным является организация детского исследования, его постановка и логика прохождения. Для комплексного анализа этой проблемы представляется необходимым рассмотреть сам феномен исследования в методологическом плане.

Под исследованием следует понимать разновидность творческой деятельности, направленной на получение качественно нового знания. При этом характер полученного знания может быть различными. В ходе исследования может быть получен принципиально новый интеллектуальный продукт, и в этом случае речь идет о собственно научном исследовании.

Учащимся необходимо предоставлять возможность выбора тем, методов исследований, форм отчета о работе. Такая личностная ориентация позволит максимально приблизить темы научно-исследовательских работ к жизни самого ученика, его семьи, товарищей, сделать его исследование интересным и нужным. Темы для исследования на уроках математики бесконечно разнообразны, но их можно условно объединить в две основные группы:

1) эмпирические – темы, тесно связанные с практикой и предполагающие проведение собственных наблюдений и экспериментов;

2) теоретические – темы, ориентированные на работу по изучению и обобщению фактов, материалов, содержащихся в разных теоретических источниках.

Тема должна быть интересна ребенку, должна увлекать его.

Исследовательская работа, возможна и эффективна только на добровольной основе. Желание что-либо исследовать возникает тогда, когда объект привлекает, удивляет, вызывает интерес. Тема «навязанная» ребенку, должного эффекта не даст. Естественно, для того, чтобы выбрать тему, интересующую ребенка, нужно знать его склонности. Суметь услышать, понять, почувствовать его интересы – сложная, но вполне решаемая педагогическая задача.

Тема должна быть выполнима, решение ее должно принести реальную пользу участникам исследования.

Подвести ребенка под ту идею, в которой он максимально реализуется как исследователь, раскроет лучшие стороны своего интеллекта, получит новые полезные знания, умения и навыки.

Тема должна быть оригинальной, в ней необходим элемент неожиданности, необычности.

Это правило ориентировано на развитие важнейшей характеристики творческого человека – умение видеть проблемы. Способность находить необычные, оригинальные точки зрения на разные, в том числе и хорошо известные предметы и явления отличает истинного творца от посредственного, творчески неразвитого человека.

Тема должна быть такой, чтобы работа могла быть выполнена относительно быстро.

Способность ребенка долго концентрировать собственное внимание на одном объекте, невелика. Долго целенаправленно работать в одном направлении ему обычно очень трудно. Учитывая эту особенность детской природы, следует стремиться к тому, чтобы первые исследовательские опыты не требовали длительного времени.

Педагогам, начинающим исследовательскую работу с детьми, так же следует обратить внимание на возможный уровень решения проблемы. Проблема должна соответствовать возрастным особенностям детей. Эта позиция касается обычно формулировки и отбора материала для решения. Одна и та же проблема может решаться детьми разного возраста на разных этапах обучения по-разному, с различной степенью глубины.

Необходимо обращать внимание на соответствие желаний и возможностей. Выбирая проблему, нужно учесть, есть ли необходимые для ее решения средства и материалы. Отсутствие литературы, необходимой исследовательской базы, невозможность собрать необходимые данные, обычно приводят к поверхностному решению. Поверхностное решение рождает пустые выводы, а это мешает развитию творческого мышления, основанного на доказательном исследовании и надежных знаниях.

Как показывает практика, теоретические исследования являются самыми сложными в работе со школьниками. Школьнику трудно самостоятельно работать с информацией, но некоторые дети справляются с этой работой. Большинству детей значительно интереснее просто фантазировать, создавая несуществующие объекты с какими-либо сверх возможностями, либо проводить живые наблюдения и эксперименты. Конечно, очень важно стимулировать и сохранять в ребенке жажду экспериментирования и фантазирования. Но умение анализировать и синтезировать информацию (как добытую самостоятельно, так и найденную другими) – интеллектуальное свойство более высокого порядка. Этому также следует обучать детей, без этого нет и не может быть настоящего исследователя.

Исследования детей на базе теоретических источников имеют высокую познавательную ценность, но главное, чем они привлекательны, - это актуализация умственных способностей. Для повышения результативности этих исследований детей следует обучать специальным приемам и навыкам работы с теоретическими источниками.

Наиболее привлекательны для детей эмпирические исследования. Они важны с точки зрения творческого развития учащихся, а так же полезны в информационном плане. Все эти исследования предполагают наличие экспериментальной части, в которую входят не только сбор теоретического материала, но и проведение специальных наблюдений и опытов. Рассказывая о результатах своих исследований во время защиты, авторы опираются на надежный фундамент собственных наблюдений и экспериментов.

Использование элементов исследовательской деятельности на уроках и во внеурочное время имеет свои плюсы:

- повышается мотивация к изучению предмета;
- учащиеся получают навыки самостоятельного приобретения знаний, развивается стремление к познанию;
- развивается аналитическая культура, исследовательское творчество;
- развивается способность занимать исследовательскую позицию по отношению к окружающим явлениям;
- учащиеся учатся планировать свою деятельность;
- учащиеся совершенствуют поисково-информационную деятельность;
- развивается культура эстетического оформления работы, умение представить свою работу;
- приобретается чувство ответственности за свое решение;
- развиваются коммуникативные умения.

Таким образом, в ходе исследовательской деятельности формируются личностные, регулятивные, познавательные, коммуникативные универсальные учебные действия, что отвечает основным требованиям ФГОС.

Один из компонентов исследовательской деятельности обучающихся – исследовательские умения, которые определяются как система интеллектуальных, практических умений и навыков учебного труда, необходимого для самостоятельного исследования или его части. Для их формирования можно решать учебно-исследовательские задачи (задачи, процесс решения которых требует выполнения одного или нескольких исследовательских умений), используя традиционные технологии в сочетании с информационными, уделяя последним больше внимания, когда они имеют преимущества.

Таким образом, взаимодополнение личностного, ситуационного и задачного подхода к организации исследовательской деятельности на уроках математики позволяет достаточно полно реализовать потенциалы этой деятельности. Поэтапное включение в исследовательскую деятельность является одним из эффективных путей обогащения индивидуального исследовательского опыта ребенка.

В качестве основного средства организации исследовательской работы на уроках математики выступает система исследовательских заданий.

Исследовательские задания – это задания, содержащие проблему, причем не всегда лежащую на поверхности,поэтому прежде чем приступить к решению необходимо сначала проблему обозначить сформулировать, а уже потом переходить к решению; зачастую выявление проблемы и еерешение требуют проведения теоретического анализа, применения одного или нескольких методов научного исследования, с помощью которых обучающиеся открывают ранее неизвестное для них знание.

Исследовательские задания на уроке математики могут выполняться на любом этапе урока, а так же задаваться на дом. Например, на этапе актуализации опорных знаний можно включить задачи на установление сходства и соответствия, задачи на оперирование понятиями «все», «некоторые», «отдельные», на развитие смекалки и логики.

На этапе открытие новых знаний часто создается проблемная ситуация, в ходе которой обучающимся предлагается выполнить задание по новой теме самостоятельно, возникает проблема, учащиеся сами должны найти поиск решения задания.

На этапе закрепления использует логические задачи, на активный перебор вариантов отношений, задачи на установление временных, пространственных и функциональных отношений, а так же решение магических квадратов, треугольников и прохождение по магическим лабиринтам, определение множеств, заполнение таблиц, решение задач с помощью «дерева вариантов», определение истинности и ложности высказываний и т.д.

Урок математики, на котором применяется исследовательский метод, содержит следующие учебные элементы:

- ситуация успеха – ученикам предлагается задачи, которые каждый ученик решает без особых затруднений;

- ситуация затруднения (ощущения проблемы) – ученикам предлагается задача, похожая на предыдущие, но решить до конца они ее не могут, так как они не имеют еще необходимых знаний;

- постановка учебной проблемы – обучающиеся, осознав проблему, определяют каких знаний им не хватает, для того чтобы решить задачу, выдвигают гипотезы о возможных путях решения задачи;

- решение учебной проблемы. Если выдвинуто несколько путей решения проблемы, то для оптимизации и эффективного использования времени урока возможна организация групповой исследовательской деятельности.

Одна из главных задач школы и учителя состоит в том, чтобы дать учащимся умения, позволяющие им активно включаться в творческую, исследовательскую деятельность, содействовать формированию и развитию исследовательских навыков и умений у учащихся. В математике исследование – образ мышления. Исследование должно быть доступно ученику. Задача учителя создать условия, при которых ученик мог бы применять новые знания в незнакомой нестандартной ситуации. Для этого необходимо определенным образом подобрать систему упражнений.

Педагогическая ценность исследовательских заданий в том, что они помогают учителю подвести учащихся к самостоятельному мышлению и самостоятельной практической деятельности; способствуют формированию у школьников таких качеств, как вдумчивость, терпеливость, настойчивость, выдержка, аккуратность, сообразительность; развивают исследовательский подход к изучаемым технологическим процессам.

Практическое освоение методические основ использования заданий исследовательского характера на уроках математики

Небольшой набор исследовательских задач, которые можно рассмотреть на уроках математики в 5-6 классах. К задачам даны комментарии для учителя, к некоторым представлены возможные решения и ответы.

1. Замечательные числа. Назовем натуральное число «замечательным», если оно самое маленькое среди всех натуральных чисел с такой же суммой цифр. Например, число 1 замечательное, потому что оно самое маленькое из чисел 1, 10, 100, 1000 и так далее. 1 – это первое замечательное число. Найдите второе замечательное число. Опишите все числа, у которых сумма цифр такая же. То же для третьего, десятого, 2010-го замечательного числа.

Найдите самое большое двузначное замечательное число. Какой у него номер?

Комментарий. Можно последовательно выписывать числа 1, 2, 3 и т.д. и объединять их в семейства с одинаковой суммой. Выяснится, что *все* числа разбиваются на семейства, в каждом из которых сумма цифр одна и та же и равна номеру семейства.

2. Прямоугольники с заданной площадью. На клетчатой бумаге нарисуйте все прямоугольники, у которых площадь равна 24 клеткам. (Стороны должны идти по границам клеток.) Сколько получится таких прямоугольников?

Для каких площадей бывает только один прямоугольник? Два разных прямоугольника? Три разных прямоугольника? Как зависит количество вариантов от площади?

Найдите из всех прямоугольников с одинаковой площадью тот, у которого периметр наименьший.

Комментарий. Задача подводит ученика к понятию простых и составных чисел. Организовать исследование можно таким образом: ребёнок пытается нарисовать все искомые прямоугольники, что-то пропускает. Ему указывают ошибку и обсуждают, как действовать, чтобы ничего не пропустить (*упорядоченный перебор*). Затем предлагают изучить более простые случаи: прямоугольники с площадью 1, 2, 3 и так далее. Рассмотренные случаи объединяют в группы: площади, дающие один прямоугольник, два прямоугольника, три и так далее. Затем надо связать группы со свойствами чисел.

По ходу задачи обычно возникает вопрос о том, считать ли такие прямоугольники «за два или за один» (рис.1): Это важный момент, так как математикам часто приходится договариваться о том, *какие объекты отождествлять, а какие считать различными*.

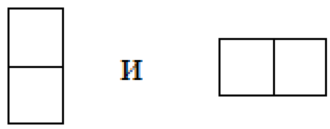

Рисунок 1

3. Разложение числа. Число 15 можно тремя способами представить в виде суммы последовательных натуральных чисел: 15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5. А сколько таких способов для числа 115? Попробуйте определить как найти количество способов для произвольного числа?

Комментарий. План исследования и полное решение представлено в книге Д. Пойа. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание на С.360 №№49-51. Ключевые моменты, на которые стоит обратить внимание: на рисунке 2 а) представлено *треугольное число* 1 + 2 + 3 + 4 = 10. Аналогично этому число 3 + 4 + 5 = 12, представленное на рисунке 2 б) можно назвать *«трапецеидальным»* числом.

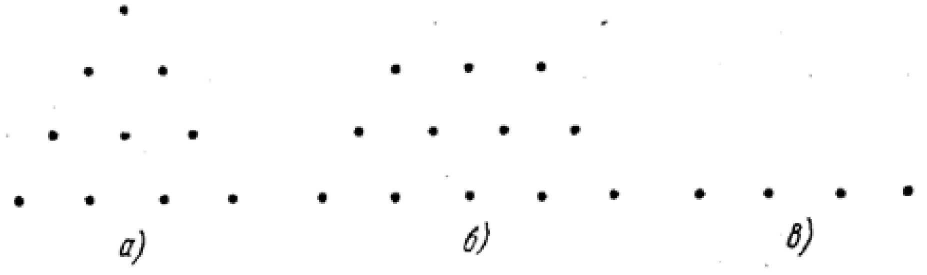

Рисунок 2

Если бы мы захотели включать в наше определение предельные случаи (что часто бывает желательным), то нам пришлось бы рассматривать числа, представленные на рисунке 2 а) и в), также как *«трапецеидальные»*. Но тогда любое положительное число было бы *«трапецеидальным»* (поскольку его можно представить в виде одного ряда точек; см. рис.2 в) и определение оказалось бы бессодержательным.

4. Суперкомпьютер. Суперкомпьютер умеет выполнять только одну операцию – операцию смешивания двух чисел: из чисел m, n компьютер получает число (m+n)/2. Если m+n – нечетное, то компьютер зависает. Все полученные числа хранятся в памяти. Пусть нам даны три числа, одно из которых ноль, а два другие натуральные и не равны друг другу. Для каких чисел m и n на суперкомпьютере можно получить единицу?

Комментарий. Нетрудно сообразить, что если у m и n есть нечётный общий делитель больше 1, то он будет и у всех средних, и единицы получить нам не удастся. Далее можно на примерах убедиться, что в других случаях единица получается, и попробовать это доказать. Есть два подхода: сделать набор чисел минимальным или сделать его максимальным.

При первом подходе будем выкидывать из памяти все числа, кроме нуля и двух наименьших. Легко показать, что наибольшее число такого набора всегда можно уменьшить усреднением нечётных чисел и (если надо) сведением числа к нечётному. Тем самым мы можем «спуститься» к единице всегда, кроме случая, когда два числа совпадут. Остаётся изучить условия совпадения.

При втором подходе, наоборот, рассмотрим сразу *все* числа, которые можно получить усреднением (их конечное количество). Взяв три последовательных числа x<y<z из этого множества, нетрудно доказать, что они равноотстоят друг от друга. Тем самым все числа равноотстоят друг от друга, среди них ноль, n и m. Можно найти интервал между числами – это наибольший нечётный делитель n и m.

5. Диагонали прямоугольников. На листе бумаги в клеточку обвели прямоугольник размером 199 х 991 клеток. Через сколько узлов (т.е. вершин клеточек) проходит диагональ? Сколько клеток пересекает диагональ этого прямоугольника? Попробуйте дать ответ для произвольного размера прямоугольника – размером M x N клеток.

Примечание. Диагональ пересекает клетку, если она заходит «внутрь» этой клетки, а не просто проходит через вершину.

Комментарий. От данного большого числа стоит перейти к маленьким: начать с прямоугольников 3 на 5, 3 на 6, 6 на 8 клеток. Если стороны взаимно простые, то диагональ проходит только через две угловые вершины. Если же НОД (M, N) = k > 1, то прямоугольник разбивается на k одинаковых прямоугольников со взаимно простыми сторонами. Остаётся аккуратно учесть концевые точки. Подсчёт пересекаемых клеточек сводится к подсчёту пересекаемых линий и узлов.

6. Задача о размене. Какие суммы можно уплатить монетами по 3 и 5 рублей? Обобщение: какие числа выражаются комбинацией ax+by, где a и b – данные натуральные числа, x и y – произвольные целые неотрицательные числа.

Комментарий. Нетрудно доказать, что монетами по 3 и 5 рублей можно уплатить все суммы, начиная с 8 рублей. Действительно, можно уплатить 8, 9 и 10 рублей, а все большие суммы получаются прибавлением нескольких монет по 3 рубля. Если a и b *не* взаимно простые, то через них можно выразить только те числа, которые делятся на их общий делитель (возможно, не все). Рассмотрим взаимно простые a и b. Наблюдением можно установить, что все числа, начиная с некоторого граничного, выражаются их комбинацией. Зафиксировав a, будем последовательно увеличивать b и находить граничное число. По результатам можно угадать общую формулу для граничного числа (ясно, что a и b должны входить в неё симметрично).

Другой подход: будем на числовой оси помечать выразимые числа красными кружочками, а невыразимые – синими. Картинка окажется симметричной! Полезно ознакомиться с простым, но нетривиальным доказательством этой закономерности: Е.Б. Дынкин, С.А. Молчанов, А.Л. Розенталь. Математические соревнования. Арифметика и алгебра. М., Наука, 1970. С. 76-77. Или: А.В. Спивак. Арифметика. Бюро Квантум, М., 2007. С. 30-32.

На математическом языке задача звучит так: при каких n разрешимо в целых неотрицательных числах диофантово уравнение ax + by = n?

7. Складные квадраты. Скл*а*дные числа – это числа, квадрат которых оканчивается на это же число. Например:

$5^2=2\underline{\mathbf{5}}$; $6^2=3\underline{\mathbf{6}}$; $\mathbf{25^2 = 6\underline{25}}$.

«Пятью **пять** – двадцать **пять**», «шестью **шесть** – тридцать **шесть**».

Найдите как можно больше складных чисел; найдите способ нахождения всех таких чисел.

Комментарий. Однозначных складных чисел четыре: 0, 1, 5, 6. Дву- и многозначные складные числа обязаны кончаться на эти же цифры. Двузначных складных чисел всего два: 25 и 76. Оказывается, каждое из этих чисел можно неограниченно продолжать влево (единственным образом) так, что на каждом шаге будет получаться складное число. Можно найти алгоритм получения следующих цифр. Интересно проверить, являются ли эти последовательности периодическими.

В классе 7-8 можно исследовать ситуацию в системах счисления с основанием m. Вопрос связан с появлением делителей нуля по модулю m в получающихся уравнениях*; т*от же вопрос про кубы чисел в десятичной системе приводит к ветвлению алгоритма определения следующей цифры.

8. Оси куба. Возьмём кубик, проткнём его спицей через центры противоположных граней и начнём поворачивать. За один оборот кубик будет 4 раза совпадать со своим первоначальным положением. Поэтому такую ось называют осью вращения 4-го порядка. Какие ещё оси есть у куба, и каких порядков? Что изменится, если срезать у куба один уголок? Два противоположных уголка? Два уголка с одной грани? С одного ребра? Те же вопросы, если срезать три уголка.

Комментарий. Для этой задачи лучше всего склеить модели из картона или слепить из пластилина, вращать и смотреть – будут формироваться очень полезные для юного исследователя умения – наблюдение, сравнение.

9. Квадраты на клетчатой бумаге. Квадраты какой площади можно нарисовать на клетчатой бумаге? (Вершины квадратов должны лежать в узлах клеток.) Для начала попробуйте нарисовать квадраты площадью 1, 2, 4, 5, 8, 13, 26 клеток.

Решение. Построим несколько квадратов с вершинами в узлах сетки и найдем их площади. Пусть сторона одного квадратика сетки равна 1.

1. «Прямые» квадраты (рис.3):

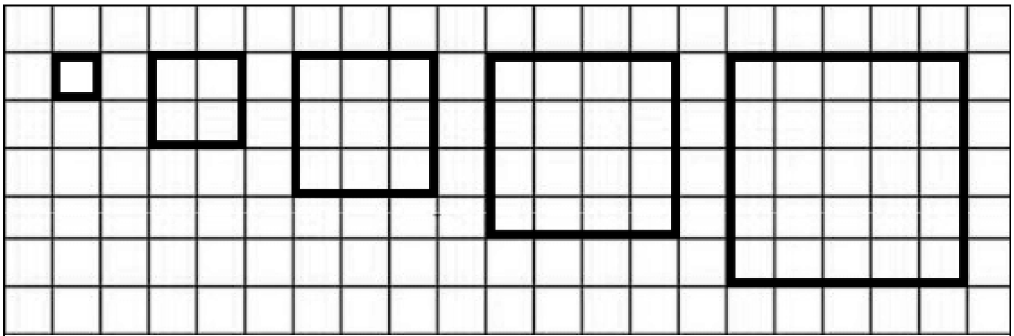

Рисунок 3

Их площадь найти легко: это квадраты длин их сторон, а стороны равны целому числу клеток. Площади прямых квадратов – это квадраты целых чисел: 1, 4, 9, 16, 25 и т.д.

2. «Косые» квадраты (рис.4):

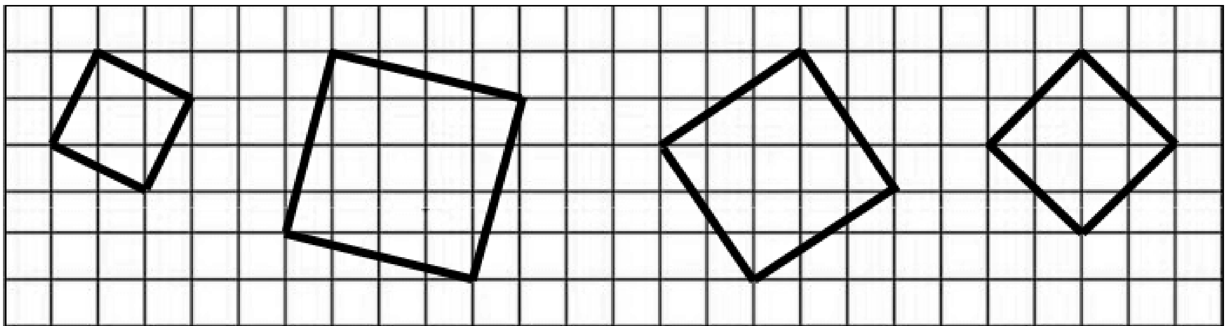

Рисунок 4

Как найти площадь «косого» квадрата?

Впишем наш «косой» квадрат в «прямой» (рис5.). Чтобы найти площадь S «косого» квадрата, надо из площади прямого квадрата вычесть 4 площади закрашенных прямоугольных треугольников, т.е. $2ab$. Эти треугольники одинаковые.

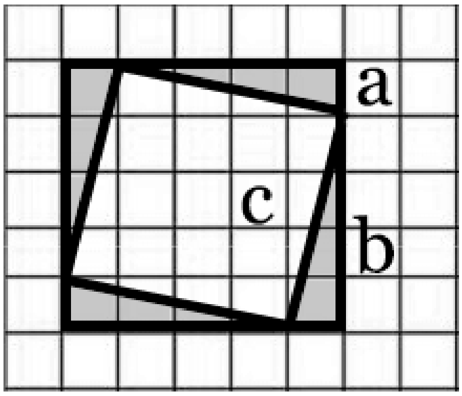

Рисунок 5

А теперь передвинем прямоугольные треугольники внутри большого квадрата так, чтобы получилось два «прямых» квадрата, как показано на (рис.6).

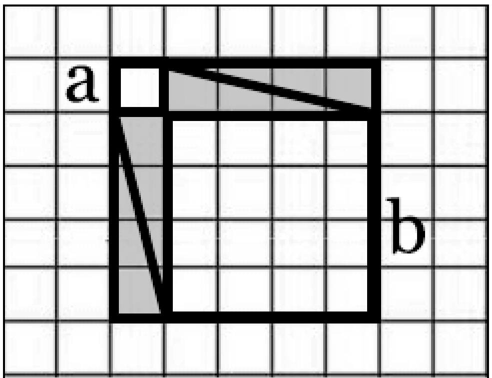

Рисунок 6

Площадь одного квадрата равна a^2, а второго — b^2. Сумма их площадей как раз равна площади «косого» квадрата, потому что это площадь большого «прямого» квадрата без тех же четырех прямоугольных треугольников.

Значит, $S=a^2+b^2$.

Если сторону «косого» квадрата обозначить через c, то его площадь $S=c^2$. Поэтому $c^2=a^2+b^2$. Так мы пришли к теореме Пифагора для закрашенных прямоугольных треугольников (Обратите внимание на то, что 5-6 классы еще не знакомы с теоремой Пифагора из школьной).

Какими же числами может выражаться площадь «косого» квадрата с вершинами в узлах сетки? Это такие числа, которые можно представить в виде суммы двух квадратов целых чисел. Например, 26=1+25, 13=4+9, 50=25+25. А, например, квадрата с вершинами в узлах сетки и площадью, равной 31, не существует, потому что 31=1+30=4+27=16+15=25+6, т.е. 31 не разбивается на сумму двух квадратов целых чисел.

10. Формула Пика. На клетчатой бумаге нарисован многоугольник с вершинами в узлах клеток. Как найти его площадь, подсчитывая лишь количества узлов?

Комментарий. Задачу можно представить эффектно: школьники рисуют сложный невыпуклый многоугольник, а вы за полминуты в уме находите площадь (как говорит В.В. Вавилов, «берём палец и считаем»). Несильные школьники справлялись с этой задачей, но процесс угадывания формулы заслонял им формальное доказательство. (В.В. Вавилов, А.В. Устинов. Многоугольники на решётках. М., МЦНМО, 2006. Показана связь формулы Пика с теоремой Эйлера о многогранниках и другими интересными задачами. В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин, Задачи по стереометрии. М., Наука, 1989. Доказаны обе формулы.)

Примерный план. Экспериментально ищем формулу для треугольника 1) без узлов внутри и на сторонах, 2) с узлами на сторонах, 3) с узлами внутри, 4) с узлами внутри и на сторонах. Придумываем общую формулу. Повторяем исследование для 4-угольников и для 5-угольников. Объединяя результаты, придумываем формулу для n-угольника. Доказываем её аддитивность (сумма «площадей» двух многоугольников равна «площади» их объединения). Затем доказываем её справедливость последовательно для прямоугольника, прямоугольного треугольника, произвольного треугольника, произвольного многоугольника.

11. Разрезы. На сколько частей можно разбить плоскость n прямыми? Укажите наибольшее и наименьшее число частей. Как надо резать?

Комментарий. Это одна из классических задач, на которых учат доказывать методом математической индукции. Но мы следуем принципу Пойа: «сначала угадай, потом докажи». Поскольку задача хорошо подходит для математического эксперимента, то подумать над ней полезно и школьнику, не владеющему методом математической индукции. Наименьшее число частей угадывается легко, с наибольшим бывает непросто сформулировать условия разрезания (так называемые *прямые общего* *положения*) и доказательства их оптимальности. Помочь может следующее замечание: вопросы «Сколько частей добавляет данная прямая» и «На сколько частей данную прямую делят предыдущие» – равносильны.

12. Раскраски. Сколькими способами можно раскрасить шесть граней одинаковых кубиков шестью красками по одной на грани так, чтобы никакие два из получившихся раскрашенных кубиков не были одинаковыми (не переходили один в другой при каком-то вращении)?

Комментарий. Задача имеет длинное «счётное» решение и короткое идейное. Чтобы изобрести второе, надо придумать такой способ раскрашивания, при котором разные последовательности действий приводят к разным раскраскам, а затем посчитать количество *последовательностей*. Например, можно зафиксировать порядок граней, а менять порядок цветов: в первый цвет закрасить любую грань, во второй – противоположную ей (5 вариантов), в третий – любую из боковых, в четвёртый – следующую за ней по часовой стрелке (3 варианта), в пятый – следующую (2 варианта), в шестой – последнюю (1 вариант). (Идея взята из работы семиклассницы.) Придумать такой способ можно, формулируя алгоритм, как понять, одинаковые или разные раскраски у двух данных кубиков. Можно изготовить модели всех таких кубиков. (М. Гарднер "Математические досуги". М., Мир, 1972. С. 34. *Приведён набор всех таких кубиков и дано обсуждение их свойств.)*

Возможно продолжить и разнообразить тематику исследования: та же задача для других правильных многогранников. Может быть, стоит начать с правильного тетраэдра. Можно раскрашивать не грани, а рёбра или вершины.

13. Сколько всего прямоугольников? На клетчатой бумаге обведён прямоугольник размером 3*4 клетки. Сколько на этой картинке квадратов? А сколько прямоугольников? Те же вопросы для прямоугольника размерами n*m.

Комментарий. Начальные шаги задачи вполне доступны младшеклассникам и послужат хорошей тренировкой для упорядоченного перебора. В общем виде ответы выражаются многочленами невысоких степеней от размеров фигур. Интересно, что прямоугольников в квадрате со стороной n оказывается столько же, сколько кубиков в кубе со стороной n. Возникает задача доказать это равенство непосредственно – не подсчитывая количество таких квадратиков и кубиков по отдельности, а установив взаимно однозначное соответствие между ними. Это пример *обратной задачи комбинаторики* (термин А.К. Звонкина).

Эффективный прием включения обучающихся в исследовательскую деятельность – решение задач с нарастающей сложностью условия.

14. Одной из первых аксиом геометрии, относящейся к взаимному расположению точек и прямых на плоскости, является аксиома о том, что через любые две точки плоскости проходит единственная прямая. Учащимся можно предложить следующие задачи, идущие с нарастанием сложности.

14.1. Сколько прямых проходит через различные пары из трех точек, не лежащих на одной прямой? (Ответ: 3.)

14.2. Сколько прямых проходит через различные пары из четырех точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? (Ответ: 6.)

14.3. Сколько прямых проходит через различные пары из пяти точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? (Ответ: 10.)

14.4. Сколько прямых проходит через различные пары из n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой? Укажите способ построения таких точек.

Решение. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ – n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Для построения таких точек достаточно отметить их на окружности.

Выясним, сколько прямых проходит через точку A_1 и оставшиеся точки. Так как число оставшихся точек равно $n - 1$ и через каждую из них и точку A_1 проходит одна прямая, то искомое число прямых будет равно $n - 1$.

Заметим, что рассуждения, проведенные для точки A_1, справедливы для любой точки. Поскольку всего точек n и через каждую из них проходит $n - 1$ прямая, то число посчитанных прямых будет равно $n(n - 1)$. Конечно, этот ответ, который могут дать учащиеся, не является верным. Например, при n = 3 получаем $n(n - 1) = 6$, а число прямых на самом деле равно 3. Хорошо, если учащиеся сами догадаются, что при указанном выше подсчете мы каждую прямую посчитали дважды и поэтому число прямых, проходящих через различные пары из n данных точек, равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Полученная формула числа прямых имеет большое значение, в дальнейшем будет появляться при решении различных комбинаторных задач. Поскольку каждая прямая однозначно задается двумя точками, мы, по существу, вычислили, сколько различных пар можно составить из n элементов. При этом не имеет значение, какие это элементы. Число таких пар называется числом сочетаний из n элементов по два и обозначается C_n^2. Например, если в классе 20 учеников, то число различных пар, которые можно образовать из учеников этого класса, равно $C_{20}^2 = 190$.

15. Следующая серия задач связана с числом попарных пересечений прямых на плоскости. Из сформулированной выше аксиомы непосредственно следует, что две прямые могут иметь не более одной общей точки.

15.1. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь три прямые? (Ответ: 3.)

15.2. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь четыре прямые? (Ответ: 6.)

15.3. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь пять прямых? (Ответ: 10.)

15.4. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n прямых? Укажите способ построения таких прямых.

Решение. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая прямая пересекается с каждой, и при этом никакие три прямые не пересекаются в одной точке. Пример построения попарно пересекающихся прямых показан на рисунке 7.

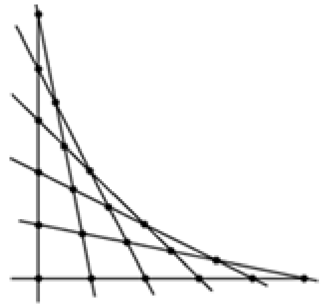

Рисунок 7

В этом случае каждая прямая имеет $n - 1$ точку пересечения с остальными прямыми, и мы находимся в ситуации, аналогичной ситуации задачи 1.4. Так как всего прямых n, и на каждой прямой $n - 1$ точка, то их общее число будет равно $n(n - 1)$. При этом, поскольку каждую точку мы подсчитали дважды, число точек пересечения будет равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Можно было бы рассуждать и короче. Действительно, для того, чтобы подсчитать количество точек пересечения, достаточно подсчитать, количество пар прямых, которые можно образовать из данных n прямых. Как мы знаем, это число равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

16. Еще одной аксиомой, относящейся к взаимному расположению прямых на плоскости, является аксиома о том, что прямая разбивает плоскость на две части. При этом, если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой, а если точки принадлежат одной части, то отрезок, их соединяющий, не пересекается с прямой.

16.1. На сколько частей разбивают плоскость две пересекающиеся прямые? (Ответ: 4.)

16.2. На сколько частей разбивают плоскость три прямые, пересекающиеся в одной точке? (Ответ. 6.)

16.3. На сколько частей разбивают плоскость три попарно пересекающиеся прямые, не пересекающиеся в одной точке? (Ответ: 7.)

16.4. На сколько частей разбивают плоскость четыре попарно пересекающиеся прямые, никакие три из которых не пересекающиеся в одной точке? (Ответ: 11.)

16.5. На сколько частей разбивают плоскость n прямых, пересекающихся в одной точке? (Ответ. $2n$.)

16.6. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекающиеся в одной точке?

Решение. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой прямой к данным. Это увеличение происходит за счет того, что какие-то части плоскости разбиваются новой прямой на меньшие части. Так, если имелось две пересекающиеся прямые, то при добавлении третьей прямой три из имеющихся четырех частей плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно $7 = 4 + 3$. Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой прямой, равно количеству частей новой прямой, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися прямыми. Каждая такая часть новой прямой разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Поскольку n-я прямая пересекается с $n - 1$ прямой, то она разбивается на n частей и поэтому число частей плоскости увеличивается на n.

Таким образом, общее число частей, на которые n прямых разбивают плоскость, равно $4 + 3 + \ldots + n$.

Нахождение формулы для этой суммы может быть проведено чисто геометрическими методами. Укажем на один из них, позволяющий найти сумму $1 + 2 + \ldots + n$.

Рассмотрим квадрат $(n + 1) \times (n + 1)$. Число его клеток равно $(n + 1)^2$. Подсчитаем эти клетки по диагоналям. В первой диагонали имеется одна клетка. Во второй диагонали – 2. И так далее, в n-ой диагонали – n. Таким образом, общее число клеток в диагоналях, расположенных ниже $(n + 1)$– ой (большой) диагонали, равно $1 + 2 + \ldots + n$. Аналогично, общее число клеток в диагоналях, расположенных выше $(n + 1)$– ой (большой) диагонали, равно $1 + 2 + \ldots + n$. Поскольку в большой диагонали $(n + 1)$ клеток, то общее число клеток в квадрате, подсчитанное по диагоналям равно $2(1 + 2 + \ldots + n) + (n + 1)$. Следовательно, имеем равенство $2(1 + 2 + \ldots + n) + (n + 1) = (n + 1)^2$, из которого получаем $1+2+\ldots+n = \frac{(n+1)^2-(n+1)}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$.

Используя эту формулу, находим искомое число частей

$4 + 3 + \ldots + n = \frac{(n+1)n}{2} + 1$.

17. Вместо прямых на плоскости можно рассмотреть окружности и выяснить количество их точек пересечения.

17.1. Какое наибольшее число точек пересечения могут иметь две окружности?

Решение. Учащиеся изображают в тетради две окружности и выясняют, что наибольшее число точек пересечения равно 2.

17.2. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь три окружности?

Решение аналогично предыдущему. (Ответ: 6).

17.3. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь четыре окружности?

Решение аналогично предыдущему. (Ответ: 12).

17.4. Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь n окружностей? Укажите способ построения таких окружностей.

Решение. Заметим, что наибольшее число точек попарных пересечений получается, если каждая окружность пересекается с каждой, и при этом никакие три окружности не пересекаются в одной точке. В этом случае каждая окружность имеет $2(n - 1)$ точку пересечения с остальными окружностями. Число точек попарных пересечений будет равно $2 + 4 + 6 +\ldots+ 2(n - 1) = n(n - 1)$. Нетрудно доказать, что для любого $n > 1$ существует n попарно пересекающихся окружностей.

Например, на рисунке 8 приведены пять попарно пересекающихся окружностей.

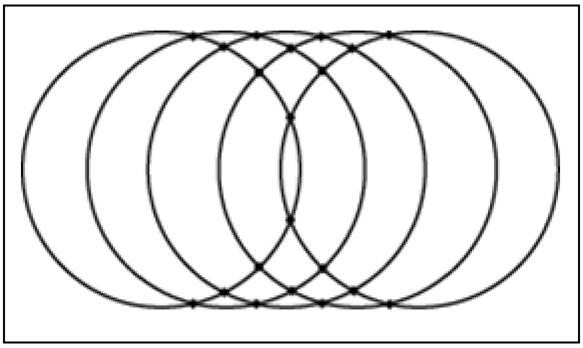

Рисунок 8

18.Выясним теперь, на сколько частей окружности разбивают плоскость.

18.1. На сколько частей разбивают плоскость две пересекающиеся окружности?

Решение. Учащиеся изображают в тетради две пересекающиеся окружности и выясняют, что число частей плоскости равно 4.

18.2. На сколько частей разбивают плоскость три попарно пересекающиеся окружности, не пересекающиеся в одной точке?

Решение аналогично предыдущему. (Ответ: 8).

18.3. На сколько частей разбивают плоскость четыре попарно пересекающиеся окружности, никакие три из которых не пересекаются в одной точке?

Решение аналогично предыдущему. (Ответ: 14).

18.4. На сколько частей разбивают плоскость n попарно пересекающихся окружностей, никакие три из которых не пересекающиеся в одной точке?

Решение. Выясним, на сколько увеличивается число частей плоскости при добавлении новой окружности к данным. Это увеличение происходит за счет того, что какие-то части плоскости разбиваются новой окружностью на меньшие части. Так, если имелось две пересекающиеся окружности, то при добавлении третьей окружности все четыре части плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно 8 = 4 + 4. При добавлении четвертой окружности шесть частей плоскости разбиваются на две части и общее число образованных частей равно 14 = 8 + 6. Заметим, что количество частей плоскости, которые разбиваются на две части новой окружностью, равно количеству дуг новой окружности, на которые она разбивается точками пересечения с имеющимися окружностями. Каждая такая дуга новой окружности разбивает соответствующую часть плоскости на две части. Поскольку n-я окружность пересекается с $n - 1$ окружностью, то она разбивается на $2(n - 1)$ дуг и поэтому число частей плоскости увеличивается на $2(n - 1)$. Таким образом, общее число частей, на которые n окружностей разбивают плоскость, равно $4 + 4 + 6 + \ldots + 2(n - 1) = 2(2 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = n(n - 1) + 2$.

19. При изучении многоугольников и их общих свойств учащимся можно предложить следующие комбинаторные задачи.

19.1. Сколько диагоналей имеет четырехугольник?

Решение. Непосредственной проверкой убеждаемся, что число диагоналей равно 2.

19.2. Сколько диагоналей имеет пятиугольник?

Решение аналогично предыдущему. Число диагоналей равно 5.

19.3. Сколько диагоналей имеет шестиугольник?

Решение аналогично предыдущему. Число диагоналей равно 9.

19.4. Сколько диагоналей имеет n-угольник?

Решение. Зафиксируем какую-нибудь вершину n-угольника. Учитывая, что диагональю является отрезок, соединяющий не соседние вершины многоугольника, получаем, что через данную вершину проходит $n - 3$

диагонали. Поскольку общее число вершин равно n, через каждую из них проходит n – 3 диагонали, и при таком подсчете каждая диагональ считается дважды, получаем, что общее число диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

20. Может ли многоугольник иметь: а) 10 диагоналей; б) 20 диагоналей; в) 30 диагоналей.

Решение. По результатам задачи 3.4 шестиугольник имеет 9 диагоналей, семиугольник – 14; восьмиугольник – 20; девятиугольник – 27; десятиугольник 35. Ясно, что многоугольники с большим числом сторон имеют большее число диагоналей. Поэтому многоугольник может иметь 20 диагоналей и не может иметь 10 или 30 диагоналей.

21. Существуют ли многоугольники, у которых число диагоналей равно числу сторон?

Решение. Один из таких многоугольников был рассмотрен в задаче 19.2. Покажем, что он единственен. Действительно, если число диагоналей n-угольника равно числу его сторон, то выполняется равенство $\frac{n(n-3)}{2} = n,$ из которого непосредственно следует, что n = 5.

22. Может ли прямая пересекать все стороны треугольника? (Ответ: Нет.)

Комментарий. Для доказательства воспользуемся аксиомой геометрии о том, что каждая прямая на плоскости разбивает эту плоскость на две части. При этом если две точки принадлежат разным частям, то отрезок, соединяющий эти точки, пересекается с прямой. Если две точки принадлежат одной части, то отрезок, соединяющий эти точки, не пересекается с прямой.

Пусть прямая пересекает стороны AB и AC треугольника ABC. Тогда точки A и B лежат по разные стороны от этой прямой. Точки A и C также лежат по разные стороны. Поэтому точки B и C лежат по одну сторону и, следовательно, отрезок BC не пересекается с этой прямой.

23. Может ли прямая пересекать все стороны четырехугольника? (Ответ: Да.) Пример приведен на рисунке 9.

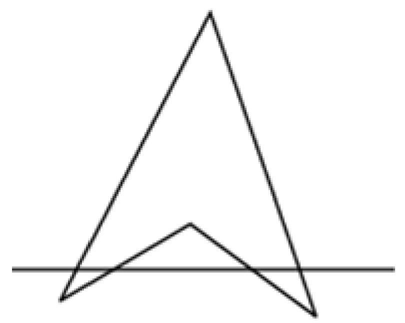

Рисунок 9

24. Может ли прямая пересекать все стороны пятиугольника?

Ответ: Нет. Пусть *ABCDE* – пятиугольник и прямая *a* пересекает его стороны *AB*, *BC*, *CD* и *DE* (рис. 10). Покажем, что прямая *a* не пересекает сторону *AE*. Действительно, точки *A* и *B*, *B* и *C*, *C* и *D*, *D* и *E* лежат по разные стороны от прямой *a*. Следовательно, точки *A* и *E* лежат по одну сторону. Поэтому отрезок *AE* не пересекается с прямой *a*.

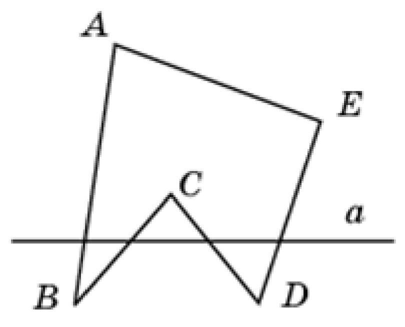

Рисунок 10

Заключение

Таким образом, мы приходим к выводу, что исследовательская работа – это особый вид деятельности, где деятельность есть активное взаимодействие субъекта и объекта. Основу исследовательской деятельности составляют действия, направленных на решение проблемных задач и ситуаций. Не следует отождествлять такие понятия как исследовательская деятельность учащихся и урок – исследование: исследовательская деятельность – понятие гораздо шире, почти не ограниченное временными рамками. Главная цель урока-исследования – приобретение учащимися функционального навыка исследования как универсального способа получения новых прочных знаний, развитие способности к исследовательскому типу мышления, активизации личностной позиции учащегося в образовательном процессе.

Таким образом, главным результатом урока-исследования является интеллектуальный, творческий продукт (знания), устанавливающий ту или иную истину в результате процедуры исследования.

Бесспорно, наиболее ценным следует считать участие детей в исследовании с самого начала, то есть с постановки вопроса.

Научно-исследовательская деятельность учащихся является одним из приоритетных направлений образования в современной школе. Психологические исследования показывают, что раннее начало творческой деятельности положительно влияет не только на формирование интеллектуальных и творческих способностей, но развивает позитивные качества личности ребенка.

Исследовательская деятельность открывает огромные возможности для сотрудничества учеников и ученика с учителем. Обязанности учителя при этом не менее сложны и ответственны, чем ученика. Необходим тщательный подбор и анализ содержания учебного материала, на основе которого учитель умеет выделить те же вопросы, которые доступны учащимся для самостоятельной проработки и важны для развития познавательного интереса.

Основные понятия научно-исследовательской работы

Аспект - (от лат. aspectus — вид, взгляд, точка зрения) — одна из сторон рассматриваемого объекта, то, как он видится с определённой точки зрения.

Гипотеза - научное предположение, выдвигаемое для объяснения каких-либо явлений.

Дедукция - вид умозаключения от общего к частному, когда из массы частных случаев делается обобщенный вывод о всей совокупности таких случаев.

Идея - определяющее положение в системе взглядов, теорий и т.п.

Индукция - вид умозаключения от частных фактов, положений к общим выводам.

Информация: - обзорная - вторичная информация, содержащаяся в обзорах научных документов; - релевантная - информация, заключенная в описании прототипа научной задачи; - реферативная - вторичная информация, содержащаяся в первичных научных документах; - сигнальная - вторичная информация различной степени свертывания, выполняющая функцию предварительного оповещения; - справочная - вторичная информация, представляющая собой систематизированные краткие сведения в какой-либо области знаний.

Исследовательская специальность (часто именуемая как направление исследования) - устойчиво сформировавшаяся сфера исследований, включающая определенное количество исследовательских проблем из одной научной дисциплины, включая область ее применения.

Категория - форма логического мышления, в которой раскрываются внутренние, существенные стороны и отношения исследуемых предметов.

Концепция - система взглядов на что-либо, основная мысль, когда определяются цели и задачи исследования и указываются пути его ведения.

Конъюнктура - создавшееся положение в какой-либо области общественной жизни. Краткое сообщение - научный документ, содержащий сжатое изложение результатов (иногда предварительных), полученных в итоге научно-исследовательской или опытно-конструкторской работы. Назначение такого документа - оперативно сообщить о результатах выполненной работы на любом ее этапе.

Ключевое слово - слово или словосочетание, наиболее полно и специфично характеризующее содержание научного документа или его части.

Метод исследования - способ применения старого знания для получения нового знания. Является орудием получения научных фактов. **Методология научного познания** - учение о принципах, формах и способах научно- исследовательской деятельности. Научная дисциплина - раздел науки, который на данном уровне ее развития, в данное время освоен и внедрен в учебный процесс высшей школы.

Научная тема - задача научного характера, требующая проведения научного исследования. Является основным планово-отчетным показателем научно-исследовательской работы.

Научная теория - система абстрактных понятий и утверждений, которая представляет собой не непосредственное, а идеализированное отображение действительности.

Научное исследование - целенаправленное познание, результаты которого выступают в виде системы понятий, законов и теорий.

Научное познание - исследование, которое характеризуется своими особыми целями, а главное - методами получения и проверки новых знаний.

Научный доклад - научный документ, содержащий изложение результатов научно-исследовательской или опытно-конструкторской работы. Опубликованной в печати или прочитанной в аудитории. **Требования к докладу:** Отражается новизна и практическая значимость темы. Раскрывается основное содержание темы. Обосновываются выводы и предложения (авторские). Может иметь форму связного текста или тезисов (публикуются в сборниках по итогам мероприятия: конференции, семинара, симпозиума и т.д.).

Научный отчет - научный документ, содержащий подробное описание методики, хода исследования (разработки), результаты, а также выводы, полученные в итоге научно-исследовательской или опытно- конструкторской работы. Назначение этого документа - исчерпывающе осветить выполненную работу по ее завершению или за определенный промежуток времени.

Научный факт - событие или явление, которое является основанием для заключения или подтверждения. Является элементом, составляющим основу научного знания.

Научная статья – своеобразный литературный жанр. Цель написания научной статьи – обозначение какой – либо научной проблемы и известных способов её решения.

Структурные компоненты научной статьи:

- Описание проблемы и её актуальности для теории и практики.
- Краткие данные о методике исследования.
- Анализ собственных научных результатов и их обобщение.
- Выводы и предложения по проведению исследовательской деятельности в дальнейшем.
- Ссылки на цитируемую литературу.

Обзор - научный документ, содержащий систематизированные научные данные по какой-либо теме, полученные в итоге анализа первоисточников. Знакомит с современным состоянием научной проблемы и перспективами ее развития.

Объект исследования - процесс или явление, порождающее проблемную ситуацию и избранное для изучения. Предмет исследования - все то, что находится в границах объекта исследования в определенном аспекте рассмотрения. Принцип - основное, исходное положение какой-либо теории, учения, науки.

Проблема - крупное обобщенное множество сформулированных научных вопросов, которые охватывают область будущих исследований. Различают следующие виды проблем: - исследовательская - комплекс родственных тем исследования в границах одной научной дисциплины и в одной области применения; - комплексная научная - взаимосвязь научно-исследовательских тем из различных областей науки, направленных на решение важнейших народнохозяйственных задач; - научная - совокупность тем, охватывающих всю или часть научно-исследовательской работы; предполагает решение конкретной теоретической или опытной задачи, направленной на обеспечение дальнейшего научного или технического прогресса в данной отрасли.

Теория - учение, система идей или принципов. Совокупность обобщенных положений, образующих науку или ее раздел. Она выступает как форма синтетического знания, в границах которой отдельные понятия, гипотезы и законы теряют прежнюю автономность и становятся элементами целостной системы.

Умозаключение - мыслительная операция, посредством которой из некоторого количества заданных суждений выводится иное суждение, определенным образом связанное с исходным.

Аннотированный перечень источников,

которые содержат исследовательские задачи

1. В.И. Арнольд «Задачи для детей от 5 до 15 лет». М., МЦНМО, 2004. *«Я глубоко убеждён, что эта культура <мышления> более всего воспитывается ранним самостоятельным размышлением о простых, но не легких вопросах, вроде приведенных ниже».* Несмотря на «детское» название, брошюра весьма содержательна и математически, и методически. В частности, задачи NN 33, 35, 41, 45, 46, 47-49, 55 дают хорошие темы для исследования.

2. Н.Б. Васильев, В.Л. Гутенмахер, Ж.М. Раббот, А.Л. Тоом. «Заочные математические олимпиады». М., Наука, 1986. *«За разрозненными фактами мы старались увидеть контуры важных математических понятий и конструкций, показать, что обобщение сравнительно несложных задач иногда выводит на передний край математики».* В книге много интересных и содержательных задач и их обсуждения, обобщения, связи с другими задачами.

3. Б.Р. Френкин (сост.). Летние конференции Турнира городов. Избранные материалы. Вып. 1. М., МЦНМО, 2009. «*... подробно рассмотрен ряд задач, предложенных на Летних конференциях международного Турнира городов, где одарённые школьники из разных стран приобщаются к исследовательской работе в области математики. Приведены решения задач, их обобщения, освещены смежные вопросы. Тематика издания связана с различными областями современной математики.*»

4. А.К. Звонкин «Малыши и математика». М., МЦНМО-МИОО, 2006. Прекрасная книга об опыте математического кружка для дошкольников, «*учит не математике, а образу жизни*».

5. Д. Пойа. Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. М., Наука, 1976. УРСС, 2009. «*Обучение математике должно предусматривать ознакомление учащихся*

(разумеется, в допустимых пределах) со всеми сторонами математической деятельности. Особенно важно, чтобы оно открывало дорогу к самостоятельной творческой работе…» Формулируются общие подходы к решению задач, обсуждается, какие задачи хороши для исследования, приводится множество примеров.

6. Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения. М., изд-во Иностр. Лит, 1957. УРСС, 2009. «*Будем учиться доказывать, но будем учиться также догадываться.*» На большом числе примеров демонстрируются основные приёмы догадки – индукция и аналогия. Обе книги Пойа для нашей темы – абсолютная классика.

7. Д.Э. Шноль, А.И. Сгибнев, Н.М. Нетрусова «Система открытых задач по геометрии. 7 класс. 8 класс.» М., Чистые пруды, 2009 (http://sch-int.ru/intel/index.php/kafmatem). Практически весь курс геометрии 7-8 класса изложен в виде открытых задач, допускающих в обучении элементы исследования.

8. А.И. Сгибнев «Как задавать вопросы?» / «Математика», 2007. № 12. С. 30-41. (http://www.mccme.ru/nir/uir/vopr.pdf) Приведён ряд способов открыто формулировать задачи.

9. А.И. Сгибнев «Экспериментальная математика» / «Математика». 2007. № 3. С. 2-8. (http://www.mccme.ru/nir/uir/exp.pdf) Обсуждается роль эксперимента в математике и на уроке математики, приведено много задач индуктивного типа.

10. М.А. Ройтберг. «Игра в полоску» [Электронный ресурс] // Полином. 2009. N 1. С. 37-46: http://www.mathedu.ru/polinom/polinom2009-1.pdf На примере несложной задачи на изобретение алгоритма высказываются важные соображения о процессе решения исследовательских задач вообще.

11. А.Б. Скопенков. «Размышления об исследовательских задачах для школьников» / Мат. Просвещение. 2008. № 12. Сс. 23-32 (http://www.mccme.ru/circles/oim/issl.pdf). Изложены мысли о *научно-*

исследовательской работе школьников: подбор задачи, требования к работе, подготовка доклада, выбор конференции, примеры работ.

12. А.И. Сгибнев. «Что такое исследовательская работа школьника по математике?» http://www.mccme.ru/nir/uir/vern.pdf Даётся описание, примеры хороших исследовательских работ, предостережения против типичных ошибок.

Литература

1. Федеральный Государственный Образовательный Стандарт Основного Общего Образования
2. Савенков, А.И. Психология исследовательского обучения. [Текст] / А.И. Савенков // Москва, Академия развития. 2005 г. 450 с.
3. Рослова Л.О.. Материалы курса «Методика преподавания наглядной геометрии учащимся 5-6 классов»: лекции 1-4. – М.: Педагогический университет «Первое сентября», 2009.-64с.
4. Шарыгин И.Ф. Наглядная геометрия. 5-6 кл.: Пособие для общеобразовательных учреждений/ 5-е издание, стереотип. – М.: Дрофа, 2002.
5. Шейнина О.С.,Соловьева Г.М. Математика. Занятия школьного кружка. 5-6 кл. – М.: Издательство НЦ ЭНАС, 2004.
6. В.В. Вавилов, А.В. Устинов. Многоугольники на решётках. М., МЦНМО, 2006.
7. В.В. Прасолов, И.Ф. Шарыгин, Задачи по стереометрии. М., Наука, 1989..