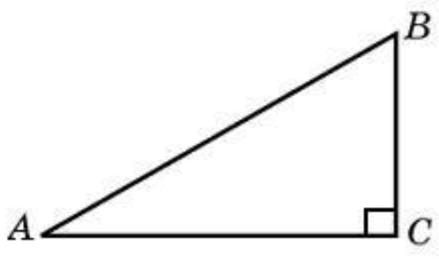
*ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК*



**1.** В треугольнике *ABC* угол *C* равен $90^\circ$, $AC = 4,8$, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите *AB*.

Решение. По определению синуса $sinA = \frac{BC}{AB}$, значит, по условию $BC = 7x, AB = 25x$. Тогда, по теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AC^2 = 625x^2 - 49x^2 = 576x^2$. То есть $AC = 24x$. По условию $24x = 4{,}8 \rightarrow x = 0{,}2 \rightarrow AB = 25x = 25 \cdot 0{,}2 = 5$.

**2.** В треугольнике *ABC* угол *C* равен $90^\circ$, $AC = 4$, $\cos A = 0,5$. Найдите *AB*.

Решение. По определению косинуса $cosA = \frac{AC}{AB}$, значит, $AB = \frac{AC}{cosA} = \frac{4}{0{,}5} = 8$.

**3.** В треугольнике *ABC* угол *C* равен $90^\circ$, $AC = 4$, $\mathrm{tg} A = \frac{33}{4\sqrt{33}}$. Найдите *AB*.

Решение. По определению тангенса $tgA = \frac{BC}{AC}$, значит, по условию $BC = \sqrt{33}x, AC = 4x$. По условию $4x = 4 \rightarrow x = 1$. Тогда, по теореме

Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AB^2 = 33x^2 + 16x^2 = 49x^2$. То есть,

$$AB = 7x = 7.$$

**4.** В треугольнике *ABC* угол *C* равен $90^\circ$, $AC = 8$, $\mathrm{tg} A = 0,5$. Найдите *BC*.

Решение. По определению тангенса $tgA = \frac{BC}{AC}$, значит, $BC = AC \cdot tgA = 8 \cdot 0{,}5 = 4$.

**5.** В треугольнике *ABC* угол *C* равен $90^\circ$, $BC = 4$, $\sin A = 0,5$. Найдите *AB*.

Решение. По определению синуса $sinA = \frac{BC}{AB}$, значит, $AB = \frac{BC}{sinA} = \frac{4}{0{,}5} = 8$.

**6.** В треугольнике *ABC* угол *C* равен $90^\circ$, $BC = 2$, $\cos A = \frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите *AC*.

Решение. По определению косинуса
$cosA = \frac{AC}{AB}$, значит, по условию $AC = x, AB = \sqrt{17}x$. Тогда,
по теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow BC^2 = 17x^2 - x^2 = 16x^2$. То есть $BC = 4x$. По условию $4x = 2 \rightarrow x = 0{,}5 \rightarrow AC = x = 0{,}5$.

**7.** В треугольнике *ABC* угол *C* равен $90^\circ$, $BC = 4$, $\mathrm{tg} A = 0{,}5$. Найдите *AC*.

Решение. По определению тангенса $tgA = \frac{BC}{AC}$, значит, $AC = \frac{BC}{tgA} = \frac{4}{0{,}5} = 8$.

**8.** В треугольнике *ABC* угол *C* равен $90^\circ$, $AC = 24$, $BC = 7$. Найдите $\sin A$

Решение. По определению синуса
$sinA = \frac{BC}{AB}$. Тогда, по теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AB^2 = 576 + 49 = 625$. То есть $AB = 25$. Получаем $sinA = \frac{7}{25} = 0{,}28$.

**9.** Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.

Решение. По условию $BC = 6, AB = 10$. Тогда, по теореме Пифагора

$$AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AC^2 = 100 - 36 = 64. \text{ То есть } AC = 8.$$

$$\text{Получаем } S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24.$$

**10.** Площадь прямоугольного треугольника равна $50\sqrt{3}$. Один из острых углов равен $60^\circ$. Найдите длину катета, прилежащего к этому углу.

Решение. В прямоугольном треугольнике с острыми углами
$\angle A = 30°$ и $\angle B = 60°$ имеем $AB = x, BC = 0{,}5x, AC = 0{,}5\sqrt{3}x$. Из формулы площади $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$ следует, что $50\sqrt{3} = \frac{0{,}5x \cdot 0{,}5\sqrt{3}x}{2} \rightarrow x^2 = 50 \cdot 8 \rightarrow x^2 = 400 \rightarrow x = 20 \rightarrow BC = 0{,}5 \cdot 20 = 10$.

**11.** Площадь прямоугольного треугольника равна $\frac{50\sqrt{3}}{3}$. Один из острых углов равен $30^\circ$. Найдите длину катета, прилежащего к этому углу.

Решение. В прямоугольном треугольнике с острыми углами $\angle A = 30°$ и $\angle B = 60°$ имеем $AB = x, BC = 0{,}5x, AC = 0{,}5\sqrt{3}x$ . Из формулы площади $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$ следует, что $\frac{50\sqrt{3}}{3} = \frac{0{,}5x \cdot 0{,}5\sqrt{3}x}{2} \rightarrow x^2 = \frac{50 \cdot 8}{3} \rightarrow x^2 = \frac{400}{3} \rightarrow x = \frac{20}{\sqrt{3}} \rightarrow AC = 0{,}5\sqrt{3} \cdot \frac{20}{\sqrt{3}} = 10.$

**12.** Площадь прямоугольного треугольника равна $12{,}5 \cdot \sqrt{3}$. Один из острых углов $30°$. Найдите длину гипотенузы.

Решение. В прямоугольном треугольнике с острыми углами $\angle A = 30°$ и $\angle B = 60°$ имеем $AB = x, BC = 0{,}5x, AC = 0{,}5\sqrt{3}x$ . Из формулы площади $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2}$ следует, что $12{,}5\sqrt{3} = \frac{0{,}5x \cdot 0{,}5\sqrt{3}x}{2} \rightarrow x^2 = 12{,}5 \cdot 8 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10 \rightarrow AB = 10.$

**13.** В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 10, а угол, лежащий напротив него, равен $45°$. Найдите площадь треугольника.

Решение. В прямоугольном треугольнике с острыми углами $\angle A = 45°$ и $\angle B = 45°$ имеем $AB = \sqrt{2}x, BC = x, AC = x$ . По условию $x = 10.$ По формуле площадь треугольника $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{100}{2} = 50.$

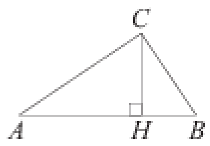
**14.** В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна 10, а один из острых углов равен $45°$. Найдите площадь треугольника.

Решение. В прямоугольном треугольнике с острыми углами $\angle A = 45°$ и $\angle B = 45°$ имеем $AB = \sqrt{2}x, BC = x, AC = x$ . По условию $\sqrt{2}x = 10 \rightarrow x = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}.$ По формуле площадь треугольника $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{x^2}{2} = \frac{25 \cdot 2}{2} = 25.$

**15.** Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 15. Найдите синус наименьшего угла этого треугольника.

Решение. Наименьший угол лежит против меньшего катета. Пусть $BC = 15, AC = 20.$ По определению синуса $sinA = \frac{BC}{AB}$. Тогда, по теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AB^2 = 400 + 225 = 625.$ То есть $AB = 25.$ Получаем $sinA = \frac{15}{25} = 0{,}6.$

**16.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ катет $AC = 35$, а высота $CH$ , опущенная на гипотенузу, равна $14\sqrt{6}$. Найдите $\sin\angle ABC$ .



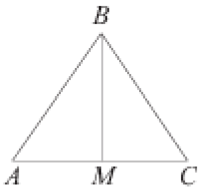

Решение. В прямоугольном треугольнике $AHC$ $sin\angle CAH = \frac{CH}{AC} = \frac{14\sqrt{6}}{35} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

В прямоугольном треугольнике $ABC$ $cosB = sinA = \frac{2\sqrt{6}}{5}$. По основному тригонометрическому тождеству $sin^2B + cos^2B = 1 \rightarrow sin^2B = 1 - \frac{4 \cdot 6}{25} = \frac{1}{25} \rightarrow sinB = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

## *РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК*

*AB=BC*

$BM \perp AC$




**17.** Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5, а основание равно 6. Найдите площадь этого треугольника.

Решение. Проведем высоту *BM* к основанию *AC*. По свойству равнобедренного треугольника – высота, проведенная к основанию, является медианой. Значит *AM=MC=3*. Тогда, по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике *ABM* :

$$AM^2 + BM^2 = AB^2 \rightarrow BM^2 = 25 - 9 = 16. \text{То есть } BM = 4.$$

$$\text{Получаем } S_{ABC} = \frac{AC \cdot BM}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12.$$

**18.** Площадь равнобедренного треугольника равна $25\sqrt{3}$. Угол, лежащий напротив основания, равен $120^\circ$. Найдите длину боковой стороны треугольника.

Решение.
По условию $\angle B =$
$120^\circ$. По свойству равнобедренного треугольника $\angle A = \angle C = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$. Тогда в прямоугольном треугольнике $ABM$ имеем $AB = x, BM = 0{,}5x, AM = 0{,}5\sqrt{3}x$, тогда $AC = 2AM =$

$\sqrt{3}x.$ Из формулы площади $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BM}{2}$ следует, что $25\sqrt{3} = \frac{0,5x \cdot \sqrt{3}x}{2} \rightarrow$ $x^2 = 25 \cdot 4 \rightarrow x^2 = 100 \rightarrow x = 10 \rightarrow AB = 10.$

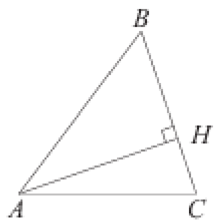
**19.** Периметр равнобедренного треугольника равен 16, а боковая сторона — 5. Найдите площадь треугольника.

Решение. Тогда сумма боковых сторон равна 10, а основание равно 16-10=6. Проведем высоту *BM* к основанию *AC*. По свойству равнобедренного треугольника – высота, проведенная к основанию, является медианой. Значит *AM=MC=3*. Тогда, по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике *ABM :*

$$AM^2 + BM^2 = AB^2 \rightarrow BM^2 = 25 - 9 = 16. \text{То есть } BM = 4.$$

$$\text{Получаем } S_{ABC} = \frac{AC \cdot BM}{2} = \frac{6 \cdot 4}{2} = 12.$$

**20.** В треугольнике $ABC$ $AB = BC$, а высота $AH$ делит сторону $BC$ на отрезки $BH = 18$ и $CH = 18$. Найдите $\cos\angle B$.




Решение. В прямоугольном треугольнике *AHB* $cos\angle ABH = \frac{BH}{AB} = \frac{BH}{BC} = \frac{BH}{BH+HC} = \frac{18}{36} = 0,5.$

**21.** В треугольнике $ABC$ $AB = BC = 25$, $AC = 14$. Найдите длину медианы $BM$.

Решение. По свойству равнобедренного треугольника – медиана, проведенная к основанию, является высотой. Значит *AM=MC=7*. Тогда, по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике *ABM :*

$$AM^2 + BM^2 = AB^2 \rightarrow BM^2 = 625 - 49 = 576. \text{То есть } BM = 24.$$

**22.** В треугольнике $ABC$ стороны $AC$ и $BC$ равны. Внешний угол при вершине $B$ равен $122^\circ$. Найдите угол $C$. Ответ дайте в градусах.

Решение. Внешний угол треугольника является смежным к внутреннему. Следовательно, внутренний угол при вершине *B* равен $180° - 122° =$

$58°$. По свойству равнобедренного треугольника $\angle A = \angle B = 58°$, тогда $\angle C = 180° - 2 \cdot 58° = 180° - 116° = 64°$.

*ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА*

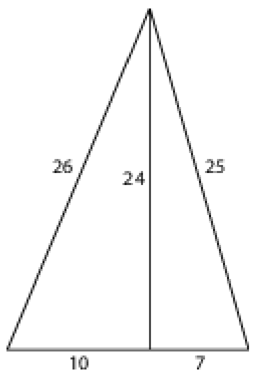
**23.** В треугольнике со сторонами 9 и 6 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой из этих сторон, равна 4. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?

<u>Решение.</u> Обозначим неизвестную высоту через $x$. Используем метод площадей, вычислив площадь двумя способами:

$$S = \frac{9 \cdot 4}{2} = \frac{6 \cdot x}{2}.$$

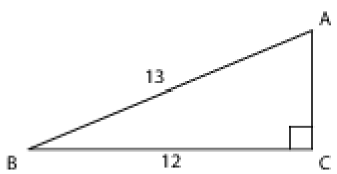
Получаем $x = \frac{9 \cdot 4}{6} = 6$.

**24.** Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.




<u>Решение.</u> По обратной теореме Пифагора треугольник со сторонами 10,24,26 является прямоугольным, так как $10^2 + 24^2 = 26^2$. Имеем сторону 17 и высоту, опущенную на неё, равную 24. Тогда площадь равна 0,5·24·17=204.

**25.** Найдите площадь треугольника, изображённого на рисунке.

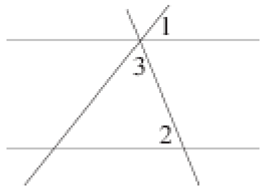



<u>Решение.</u> По теореме Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2 \rightarrow AC^2 = 169 - 144 = 25$. То есть $AC = 5$.

Получаем $S_{ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{12 \cdot 5}{2} = 30$.

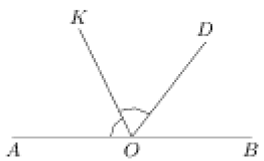
*ВЫЧИСЛЕНИЕ УГЛОВ*

**26.** Прямые $m$ и $n$ параллельны. Найдите $\angle 3$, если $\angle 1 = 24°$, $\angle 2 = 90°$. Ответ дайте в градусах.



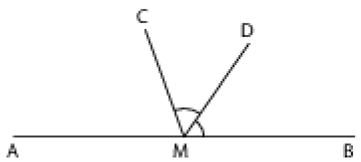

<u>Решение.</u> По свойству равенства накрест лежащих углов при пересечении параллельных прямых секущей - угол накрест лежащий к ∠2 равен ∠2. Тогда ∠1, накрест лежащий к ∠2 и ∠3 образуют развернутый угол. Значит, ∠3= 180°- ∠1- ∠2=180°- 24°-90°=66°.

**27.** Найдите величину угла $DOK$, если $OK$ — биссектриса угла $AOD$, а $\angle DOB = 52°$. Ответ дайте в градусах.



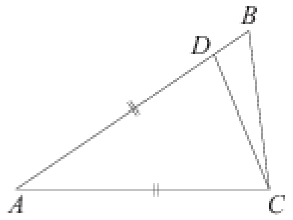

<u>Решение.</u> По свойству смежных углов *∠DOA=180°-∠DOB=180°-52°=128°.* По определению биссектрисы *∠DOK=128°:2=64°.*

**28.** На прямой $AB$ взята точка $M$. Луч $MD$ — биссектриса угла $CMB$. Известно, что $\angle DMC = 60°$. Найдите угол $CMA$. Ответ дайте в градусах.



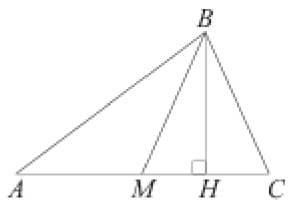

<u>Решение.</u> По свойству смежных углов *∠DOA=180°-∠DOB=180°-52°=128°.* По определению биссектрисы *∠CMB=2∠DMC=120°.* По свойству смежных углов *∠CMA=180°-∠CMB=180°-120°=60°.*

**29.** Точка $D$ на стороне $AB$ треугольника $ABC$ выбрана так, что $AD = AC$. Известно, что $\angle CAB = 13°$ и $\angle ACB = 143°$. Найдите угол $DCB$. Ответ дайте в градусах.



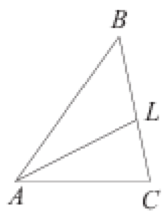

Решение. По свойству равнобедренного треугольника $ADC$ $\angle ADC = \angle ACD = \frac{180°-\angle CAB}{2} = \frac{180°-13°}{2} = 83{,}5°.$ Тогда $\angle DCB = \angle ACB - \angle ACD = 143° - 83{,}5° = 59{,}5°.$

**30.** В треугольнике $ABC$ $BM$ — медиана и $BH$ — высота. Известно, что $AC = 164$, $HC = 41$ и $\angle ACB = 74°$. Найдите угол $AMB$. Ответ дайте в градусах.




Решение. По определению медианы *AM=MC=AC:2=164:2=82.*Тогда *MH=MC-HC=82-41=41*,значит *MH= HC*, то есть треугольник *BMC* равнобедренный. По свойству равнобедренного треугольника $\angle CMB = \angle ACB = 74°.$ По свойству смежных углов $\angle AMB = 180° - 74° = 106°.$

**31.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AL$, угол $ALC$ равен $150°$, угол $ABC$ равен $127°$. Найдите угол $ACB$. Ответ дайте в градусах.



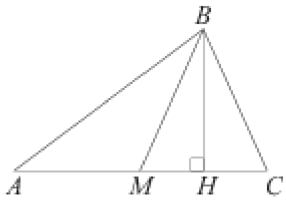

Решение. По свойству смежных углов $\angle ALB = 180° - \angle ALC = 180° - 150° = 30°.$ Тогда в треугольнике $ABL$ $\angle BAL = 180° - \angle ABC - \angle ALB = 180° - 127° - 30° = 23°.$ По определению биссектрисы $\angle BAC = 2\angle BAL = 46°.$ Тогда в треугольнике $BAC$ $\angle ACB = 180° - \angle BAC - \angle ABC = 180° - 46° - 127° = 7°.$

## *ВЫЧИСЛЕНИЕ ОТРЕЗКОВ*

**32.** Высота равностороннего треугольника равна $13\sqrt{3}$. Найдите его периметр.

Решение. Пусть $a$ – сторона равностороннего треугольника. Тогда высота равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Получаем $a$=26.

**33.** В треугольнике $ABC$ $BM$ — медиана и $BH$ — высота. Известно, что $AC = 13$и $BC = BM$. Найдите $AH$.



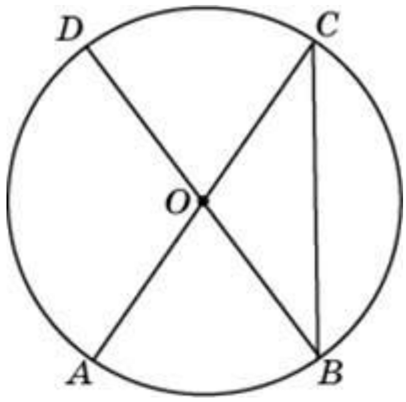

Решение. По определению медианы $AM=MC=AC:2=13:2=6{,}5$. Так как $BM=BC$,то в равнобедренном треугольнике $BMC$ высота $BH$ является медианой и , значит, $MH=MC:2=3{,}25$ . Тогда $AH=AM+MH=6{,}5+3{,}25=9{,}75$.

## *УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ*

**1.** Отрезки $AC$ и $BD$ — диаметры окружности с центром $O$. Угол $ACB$ равен $38°$. Найдите угол $AOD$. Ответ дайте в градусах.

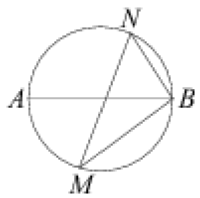

Решение По свойству вписанного угла $ACB$ имеем: $\breve{AB} = 38° \cdot 2 = 76°$. По свойству центрального угла $\angle AOB = 76°$. По свойству смежных углов $\angle AOD = 180° - 76° = 104°$.

**2.** Отрезки $AC$ и $BD$ — диаметры окружности с центром $O$. Угол $AOD$ равен $110°$. Найдите вписанный угол $ACB$. Ответ дайте в градусах.




Решение
По свойству смежных углов $\angle AOB = 180° - 110° = 70°.$ По свойству центрального угла $AOB$ имеем: $\overset{\frown}{AB} = 70°.$ По свойству вписанного угла $\angle ACB = 70°:2 = 35°.$

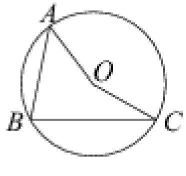
**3.** На окружности по разные стороны от диаметра $AB$ взяты точки $M$ и $N$. Известно, что $\angle NBA = 36°$. Найдите угол $NMB$. Ответ дайте в градусах.




Решение По свойству вписанного угла $NBA$ имеем: $\overset{\frown}{AN} = 36° \cdot 2 = 72°.$ Так как концы диаметра делят окружность на две равные дуги по 180°,

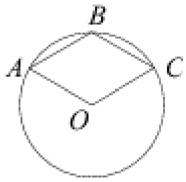
$$\text{то } \overset{\frown}{BN} = 180° - 72° = 108°. \text{ По свойству вписанного угла } \angle NMB = \\ = 108°:2 = 54°.$$

**4.** Точка $O$ — центр окружности, на которой лежат точки $A$, $B$ и $C$. Известно, что $\angle ABC = 75°$ и $\angle OAB = 43°$. Найдите угол $BCO$. Ответ дайте в градусах.



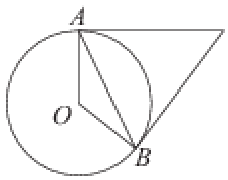

Решение Треугольники *AOB* и *BOC* - равнобедренные, так как *AO=BO=CO* – радиусы окружности. Следовательно, $\angle OBA = \angle OAB = 43°$, тогда $\angle OBC = \angle ABC - \angle OBA = 75° - 43° = 32°$. По свойству равнобедренного треугольника $\angle BCO = \angle OBC = 32°$.

**5.** Точка $O$ — центр окружности, на которой лежат точки $A$ , $B$ и $C$ таким образом, что $OABC$ — ромб. Найдите угол ABC. Ответ дайте в градусах.



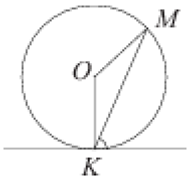

<u>Решение</u> Треугольник $AOB$ - равносторонний, так как $AO=BO$ – радиусы окружности и $AO=BA$ – стороны ромба. Следовательно, $\angle OAB=60°$, тогда смежный угол ромба $\angle ABC=180°-60°=120°$.

**6.** Касательные к окружности с центром $O$ в точках $A$ и $B$ пересекаются под углом $72°$. Найдите угол $ABO$. Ответ дайте в градусах.




<u>Решение</u> Пусть касательные пересекаются в точке $M$. Отрезки касательных, проведенных из одной точки равны: $AM=MB$, значит треугольник $AMB$ – равнобедренный. По свойству равнобедренного треугольника $\angle MBA = \frac{180°-\angle AMB}{2} = \frac{180°-72°}{2} = 54°$. Так как радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен касательной, то $\angle OBM = 90° \rightarrow \angle ABO = 90° - 54° = 36°$.

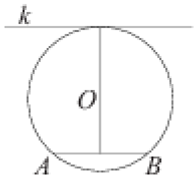
**7.** Прямая касается окружности в точке $K$. Точка $O$ — центр окружности. Хорда $KM$ образует с касательной угол, равный $83°$. Найдите величину угла $OMK$. Ответ дайте в градусах.




<u>Решение</u> Так как радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен касательной, то $\angle OKM = 90° - 83° = 7°$. Треугольник $KOM$ - равнобедренный, так как $KO=MO$ – радиусы окружности. По свойству равнобедренного треугольника $\angle OMK = \angle OKM = 7°$.

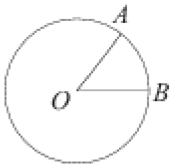
*РАССТОЯНИЯ В ОКРУЖНОСТИ*

**8.** Длина хорды окружности равна 72, а расстояние от центра окружности до этой хорды равно 27. Найдите диаметр окружности.




Решение Треугольник $OAB$ – равнобедренный, так как $OA=OB$ – радиусы окружности. Тогда перпендикуляр $OH$, опущенный на хорду из центра окружности, делит $AB$ пополам. Значит, треугольник $OAH$ – прямоугольный и $OH=27$, $AH=72:2=36$. По теореме Пифагора $OA^2 = OH^2 + AH^2 \;\rightarrow\; OA^2 = 27^2 + 36^2 \;\rightarrow\; OA^2 = 2025 \;\rightarrow\; OA = 45$ . Тогда диаметр окружности равен 90.

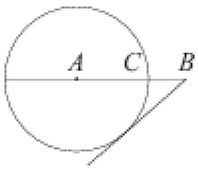
**9.** На окружности с центром $O$ отмечены точки $A$ и $B$ так, что $\angle AOB = 66^\circ$. Длина меньшей дуги $AB$ равна 99. Найдите длину большей дуги.




Решение По свойству центрального угла $AOB$ имеем: меньшая дуга $\smile{AB} = 66^\circ$. Обозначим длину большей дуги $AB$ через $x$ и составим пропорцию

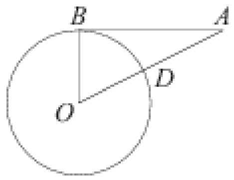
$$\frac{x}{99} = \frac{360^\circ - 66^\circ}{66^\circ} \;\rightarrow\; \frac{x}{99} = \frac{294^\circ}{66^\circ} \;\rightarrow x = \frac{99 \cdot 294}{66} = \frac{3 \cdot 294}{2} = 3 \cdot 147 = 441.$$

**10.** На отрезке $AB$ выбрана точка $C$ так, что $AC = 75$ и $BC = 10$. Построена окружность с центром $A$ , проходящая через $C$ . Найдите длину касательной, проведённой из точки $B$ к этой окружности.



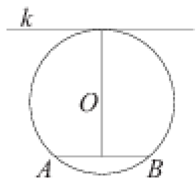

Решение По построению $AC$ является радиусом окружности. Обозначим через $K$ второй конец диаметра, проходящего через точки $A$ и $C$, и через $H$ – точку касания. По теореме о квадрате касательной $BH^2 = BC \cdot BK \;\rightarrow\; BH^2 = BC \cdot (BC + CK) \;\rightarrow\; BH^2 = BC \cdot (BC + 2AC) \;\rightarrow\; BH^2 = 10 \cdot (10 + 2 \cdot 75) \;\rightarrow\; BH^2 = 1600 \;\rightarrow\; BH = 40.$

**11.** Отрезок $AB = 40$ касается окружности радиуса 75 с центром $O$ в точке $B$ . Окружность пересекает отрезок $AO$ в точке $D$ . Найдите $AD$ .




<u>Решение</u> Так как радиус, проведенный в точку касания перпендикулярен касательной, то треугольник $OAB$ является прямоугольным. Тогда по теореме Пифагора $OA^2 = OB^2 + AB^2 \rightarrow OA^2 = 75^2 + 40^2 \rightarrow OA^2 = 7225 \rightarrow OA = 85 \rightarrow AD = OA - OD = 85 - 75 = 10.$

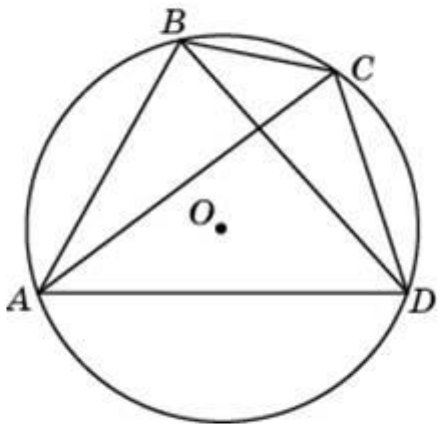
**12.** Радиус окружности с центром в точке $O$ равен 85, длина хорды $AB$ равна 80. Найдите расстояние от хорды $AB$ до параллельной ей касательной $k$.




<u>Решение</u> Треугольник *OAB* – равнобедренный, так как *OA*=*OB* – радиусы окружности. Тогда перпендикуляр *OH*, опущенный на хорду из центра окружности, делит *AB* пополам. Значит, треугольник *OAH* – прямоугольный и *OA*=85, *AH*=80:2=40. По теореме Пифагора $OA^2 = OH^2 + AH^2 \rightarrow OH^2 = 85^2 - 40^2 \rightarrow OH^2 = 5625 \rightarrow OH = 75$ . Искомое расстояние равно сумме радиуса и расстояния от центра до хорды AB, то есть 85+75=160.

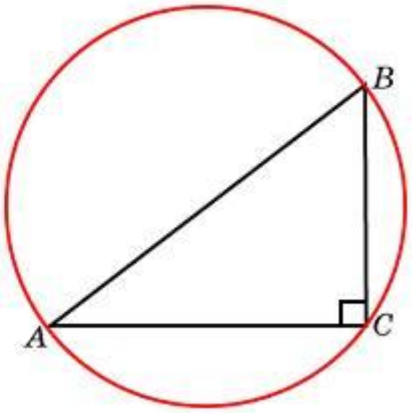
*ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ*

**13.** Четырехугольник *ABCD* вписан в окружность. Угол *ABC* равен $105^\circ$, угол *CAD* равен $35^\circ$. Найдите угол *ABD*. Ответ дайте в градусах.



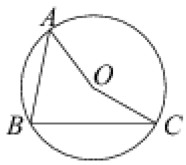

<u>Решение</u> По свойству вписанного угла $ABC$ имеем: $\breve{AC} = 105^\circ \cdot 2 = 210^\circ.$ По свойству вписанного угла $CAD$ имеем: $\breve{CD} = 35^\circ \cdot 2 = 70^\circ.$ Тогда $\breve{AD} = \breve{AC} - \breve{CD} = 210^\circ - 70^\circ = 140^\circ.$ По свойству вписанного угла $\angle ABD = 140^\circ : 2 = 70^\circ.$

**14.** В треугольнике $ABC$ $AC = 4$, $BC = 3$, угол $C$ равен $90°$. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



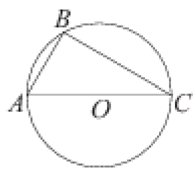

<u>Решение</u> По теореме Пифагора $BA^2 = CA^2 + CB^2 \;\rightarrow\; BA^2 = 4^2 + 3^2 \;\rightarrow\; BA^2 = 25 \;\rightarrow\; BA = 5$ . Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника является середина гипотенузы и радиус равен половине гипотенузы, то есть 2,5.

**15.** Окружность с центром в точке $O$ описана около равнобедренного треугольника $ABC$, в котором $AB = BC$ и $\angle ABC = 138°$. Найдите величину угла $BOC$. Ответ дайте в градусах.



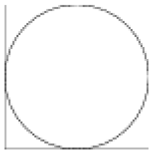

<u>Решение</u> По свойству вписанного угла $ABC$ имеем: $\breve{AC} = 138° \cdot 2 = 276°$. Так как треугольник равнобедренный, то $\angle A = \angle C$. Значит, эти углы опираются на равные дуги $\breve{AB} = \breve{BC} = (360° - 276°) : 2 = 42°$. По свойству центрального угла имеем: $\angle BOC = \breve{BC} = 42°$.

**16.** Сторона $AC$ треугольника $ABC$ проходит через центр описанной около него окружности. Найдите $\angle C$, если $\angle A = 75°$. Ответ дайте в градусах.




<u>Решение</u> Так как вписанный угол $ABC$ опирается на диаметр, то он равен $90°$. Тогда $\angle C = 90° - \angle A = 90° - 75° = 15°$.

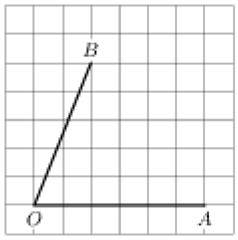
**17.** Найдите площадь квадрата, описанного вокруг окружности радиуса 83.



Решение Сторона квадрата равна диаметру описанной около него окружности, то есть $83 \cdot 2 = 166$. Тогда площадь квадрата равна $166^2 = 27556$.

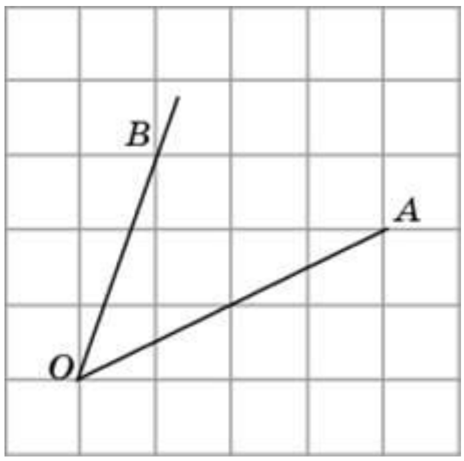
*УГЛЫ*

**1.** На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \times 1$ изображён угол. Найдите тангенс этого угла.




Решение Опустим перпендикуляр $BH$ на $OA$. Тогда $tg\angle BOA = \frac{BH}{OH} = \frac{5}{2} = 2{,}5$.

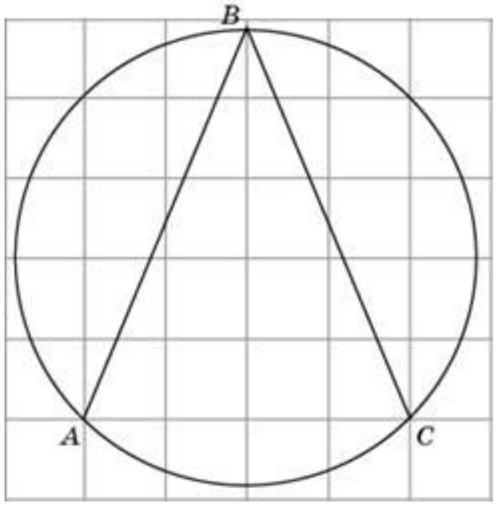
**2.** На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \times 1$ изображён угол. Найдите тангенс этого угла.




Решение **1 способ.** Соединим $A$ и $B$. Вычислим длины сторон $\Delta OAB$:

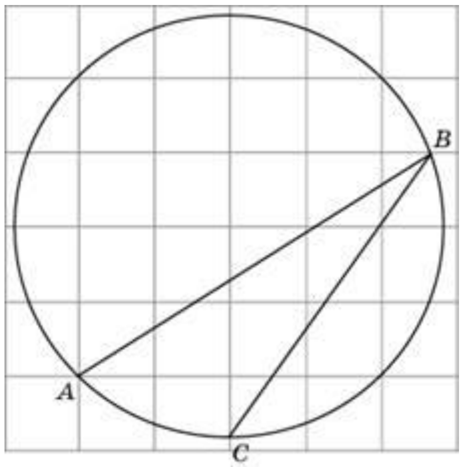
$OA = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20},\ OB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10},\ AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$. Так как $OA^2 = OB^2 + AB^2$, то по обратной теореме Пифагора $\Delta OAB$ – прямоугольный. Тогда $tg\angle BOA = \frac{BA}{OB} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = 1$.

**3.** На клетчатой бумаге с размером клетки $1 \times 1$ изображён угол. Найдите его градусную величину.




Решение Так как центральный угол $\angle AOC$=90°, то вписанный угол $\angle ABC$=90°:2=45°.

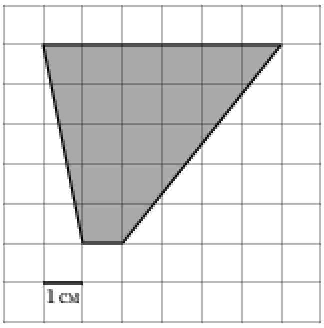
**4.** Найдите градусную меру дуги $AC$ окружности, на которую опирается угол $ABC$ . Ответ дайте в градусах.




Решение Так как центральный угол $\angle AOC$=45°, то по свойству центрального угла $\overset{\smile}{AC} = 45°$.

*ПЛОЩАДИ*

**5.** Найдите площадь трапеции, изображенной на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



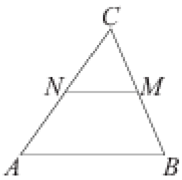

Решение **1 способ.** Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований на высоту. Основания – 1 и 6, высота 5. получаем площадь равна 0,5(1+6)5, то есть равна 17,5.

**2 способ.** Используем метод вырезания. Дополним трапецию до прямоугольника. Прямоугольник будет состоять из трапеции и двух прямоугольных треугольников. И из площади полученного прямоугольника вычтем площади прямоугольных треугольников: 6·5-0,5·4·5-0,5·1·5=30-10-2,5=17,5.

**6.** Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 189. Точка $E$ — середина стороны $AD$. Найдите площадь трапеции $AECB$

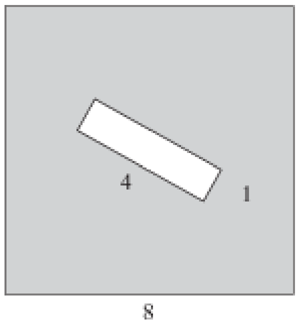
Решение

**7.** В треугольнике $ABC$ отмечены середины $M$ и $N$ сторон $BC$ и $AC$ соответственно. Площадь треугольника $CNM$ равна 57. Найдите площадь четырёхугольника $ABMN$.



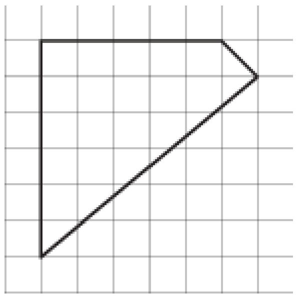

Решение Средняя линия треугольника отрезает треугольник с площадью в 4 раза меньшей площади исходного треугольника. Значит, площадь треугольника $ABC$ равна 4·57=228. Тогда площадь $ABMN$ равна 228-57=171.

**8.** Из квадрата вырезали прямоугольник (см. рисунок). Найдите площадь получившейся фигуры.




Решение  Площадь получившейся фигуры равна разности площади квадрата и площади прямоугольника. Площадь квадрата равна 64, площадь прямоугольника равна 4. Значит, площадь фигуры равна 60.

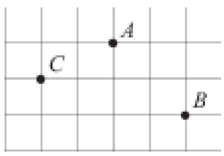
**9.** Площадь одной клетки равна 1. Найдите площадь фигуры, изображённой на рисунке.



Решение  Используем метод вырезания. Дополним фигуру до прямоугольника. Прямоугольник будет состоять из нашей фигуры и двух прямоугольных треугольников. И из площади полученного прямоугольника вычтем площади прямоугольных треугольников: 6·6-0,5·1·1-0,5·6·5=36-0,5-15=20,5.

*РАССТОЯНИЯ*

**10.** На клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см отмечены точки $A$, $B$ и $C$. Найдите расстояние от точки $A$ до середины отрезка $BC$. Ответ выразите в сантиметрах.




Решение  Расстояние равно 1,5.